AS IDEIAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO: UM DIÁLOGO ENTRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

Alessandro Emilio Teruzzi,
Professor IF Suzano - alessandro.teruzzi@ifsp.edu.br

Alexandre Maniçoba de Oliveira
Prof. Dott. IF Suzano - amanicoba@labmax.org

Resumo – A partir da história da matemática, as ideias fundamentais ligadas ao cálculo integral são debatidas em sala de aula a respeito do cálculo do volume dos sólidos – a saber, a pirâmide e a esfera. Esta atividade, que envolve a compreensão e o uso do principio de Cavalieri, requer um diálogo entre os aspectos práticos e a dimensão do "experimento mental" que pode ser construído, elaborado e debatido aproveitando das possibilidades que um recurso tecnológico como a impressora 3D oferece.

Palavras-chave: Cálculo integral, infinito, principio de Cavalieri, impressora 3D, experimento mental

INTRODUÇÃO

Com as turmas do segundo ano do ensino médio integrado (curso de automação industrial e química) foi pensada uma dinâmica em aula para discutir aspectos da geometria sólida, particularmente a respeito do cálculo dos volumes, que remetem às ideias fundamentais do cálculo infinitesimais, tais como o princípio de Cavalieri. O elemento central de tal roteiro foi construir uma parceria entre nos professores para trabalhar estas ideias a partir a experiência feita com a impressão 3D.

DESENVOLVIMENTO

O *frame* epistemológico no qual este trabalho se coloca é constituído pela concepção de que as ideias fundamentais do ensino [1] (e em particular, do ensino da matemática [2]) são elementos valiosos numa visão construtivista do conhecimento na qual as ideias se organizam em redes de conhecimentos [3] [4]. Assim, as ideias fundamentais representam ótimos candidatos para tornar-se "supernós" ou centros de interesses.[1]

As ideias do cálculo infinitesimal, tais como os pares aproximado-exato, variável-constante e a própria ideia de infinito (com o par infinitamente pequeno e infinitamente grande) representam uma escolha interessante e fértil na perspectiva das ideias fundamentais, como destaca Machado [5]. É importante ressaltar que não estamos defendendo a introdução das técnicas diferencias e integrais, mas sim as ideias fundamentais na raiz do cálculo, abordadas de maneiras intuitivas e sem muita preocupação com os formalismos.

Para resgatar as ideias fundamentais de acordo com Teruzzi [6], é útil se mergulhar na história da matemática para ver como as ideias apareceram, em que contexto, dialogando com quais outras ideias filosóficas, políticas (é significativo o trabalho de Furinghetti [7,8,9] relativo às *cognitive roots* que podem ser encontradas no estudo da história da matemática) e como estas ideias mudaram de significado ao longo do tempo (aqui a referencia é ao conceito de razão histórica de Ortega y Gassett [10]). Assim, ao mergulharmos na história da matemática, vemos como a disputa sobre os infinitésimos, sobre a possibilidades de usá-los como meio para o cálculo de áreas e volumes, é um debate que remete á Grécia clássica do V século antes da era comum, envolvendo filósofos e matemáticos do calibre de Zenão, Platão, Aristóteles, Antifon o sofista, Eudoxo e, claramente, Arquimedes [ver 6]. Um enfrentamento de ideias que não fica confinado na bacia do Mediterrâneo (as contribuições do Chinês Lui Hui são notáveis) e que prossegue na Renascença com as contribuições, entre outros, de Stevin, Kepler, Galileo, Cavalieri, Torricelli. Um debate, inclusive, no qual a experiência e os "experimentos mentais" [6] dialogam continuamente: a ideia de fatiar uma pizza em fatias, ou um cilindro em camadas, é uma operação que pode ser efetivamente feita praticamente, mas que precisa da "imaginação" para ser levada ao extremo de considerar infinitas fatias de tamanho infinitésimo.

De acordo com os PCNs [11], o campo tecnológico é um eixo a ser explorado no estudo das ciências e da matemática. Assim, veio a ideia de trabalhar as ideias do cálculo integral, particularmente a intuição por trás do principio de Cavalieri, aproveitando do recurso oferecido por uma impressora 3d, como conjecturado em [6]. Ou seja, através do recurso da impressão em 3D, trabalhar em cima da ideia do que uma linha possa ser vista como composta por "infinitos" pontos; uma superfície possa ser enxergada como composta por "infinitas" linhas paralelas; um sólido possa ser compreendido como composto por

[1] Existem vários paralelismos que podem ser esboçados entre a rede de conhecimentos e internet: por exemplo, as duas não são estáticas, mas se modificam continuamente e, também, não existem compartimentos, tampouco uma organização hierárquica, mas existem centros de interesse.

"infinitas" superfícies (camadas) paralelas e sobrepostas. O próprio modelo de funcionamento de uma impressora 3D propicia esta visão: ao derreter o filamento de PLA[2], ela depõe na superfície que está na base linhas de filamento derretidas "ponto a ponto"; coloca várias linhas uma do lado da outra para formar superfícies e, por fim, coloca camadas uma em cima da outra para formar volumes. Desta maneira, no diálogo entre experiência efetiva e experiência de pensamento a atividade da impressora 3D ocuparia a polaridade "prática".

A atividade foi organizada programando a impressora para produzir um cubo de aresta 2 cm, uma pirâmide de base quadrada com mesma base e mesma altura que o cubo e uma esfera da raio 2 cm; todos os sólidos foram programados para ser produzidos "cheios", isto é: preenchendo totalmente o espaço no interior deles. Enquanto a impressora trabalhava, foram mostradas aos alunos várias técnicas de impressão em 3D utilizando vídeos e explicando tecnologicamente as características dos diferentes processos. Os objetivos foram, basicamente, três: em primeiro lugar fascinar e cativar os alunos com as maravilhas que a tecnologia oferece neste campo; em segundo, indicar para eles, que estudam em cursos técnicos, campos inovativos e em expansão do mundo industrial e das novas tecnologias; em terceiro lugar, mostrar plasticamente a tensão entre platonismo e aristotelismo na concepção da matemática. Este último ponto refere-se ao jeito de entender a matemática como algo que existe independente do ser humano (platonismo) ou como algo produzido pelas pessoas (aristotelismo): assim, a impressora que usamos na nossa atividade seria "aristotélica", criando, linha após linha, camada após camada, algo que antes "não existia", enquanto, por exemplo, a fotopolimerização, semelhante a um processo de escultura humana, parece que libera uma escultura que... já estava no bloco de material (platonismo).

Ao longo da apresentação os alunos podiam perguntar sobre os diferentes processos e a utilidade deles e, a turno, podiam ficar perto da impressora para assistir ao processo "ao vivo"[3]. A atividade do dia foi concluída com uma demonstração "*all in one*" na qual um objeto sólido foi projetado, texturizado e imprimido na hora[4].

A esta atividade foi dada continuidade nas 4 aulas seguintes discutindo com os alunos os volumes de prismas, pirâmides[5] e esfera, discutindo o principio de Cavalieri na ideia de equivalência entre pirâmides com a mesma área de base e mesma altura e para calcular o volume da esfera tanto com o método de Kepler (decompor a esfera em infinitas pirâmides com altura igual ao raio) e com o método da "xicara de Galileo" (ver, por detalhes, [6]).

As discussões ao longo desta trajetória foram muito animadas e participativas, sempre dialogando com a experiência da impressora 3D. Particularmente, muitas dúvidas dos alunos remetiam ao caso do obstáculo didático proposto por Brusseau [8], no qual o autor francês propõe que o obstáculo que o aluno pode ter, devido ao um conhecimento prévio, tenha alguma relação com "obstáculos epistemológicos" com os quais, ao longo da história da matemática, as pessoas depararam-se. Assim, várias objeções sobre o caráter dos indivisíveis dialogam com os debates que ao longo da história apareceram (ver, por uma analise detalhada, [6])

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Um ponto que apareceu com força ao longo deste trabalho com os alunos (e na reflexão seguinte) é o papel de destaque que a possibilidade de atuar no IF representa para a realização deste tipo de parcerias e estrategias didaticas: dentro do instituto a presença de recursos, a organização da jornada e da grade horária (que prevé uma parte dedicata ao ensino em sala de aula e uma parte dedicada ao estudo, á formação, á troca de ideias entre colegas), a coexistencia de ensino médio e superior são todos elementos, ao nosso ver, indispensáveis para propiciar aulas diferenciadas, nas quais diferentes saberes e recursos podem ser juntados para propiciar aulas significativas e interessantes para os alunos.

Avaliamos a atividade muito positivamente, sendo que vários alunos, por um lado, ficaram extremamente envolvidos com o aspecto tecnologico da impressora 3D e, por outro, se apropriaram dos conceitos intuitivos do cálculo integral, levantando questões muito refinadas sendo, algumas de cunho lógico-filosofico. Tudo isso, com certeza, permitiu uma comprensão mais profunda do mecanismo que está por trás das fórmulas para calcular os volumes dos sólidos estudados no ensino médio: assim, a nossa

[2] PLA, ou *ácido polilático* , é um dos materiais mais usados para impressão 3D. É um derivado do milho e outros amidos renováveis e por isso é um material biodegradável é ambientalmente amigável.

[3] A impressora trabalhando era gravada e projetada numa tela do lado da apresentação sobre os vários tipos de impressão.

[4] Foi feito um toro elíptico com sulco nu meio de um "lado" cumprido: quase um anel achatado numa direção e alongado na outra.

[5] Para manter uma certa simplicidade esquemática e para continuar a trabalhar as ideias conectadas com o infinito, o cilindro foi enxergado como um prisma a base circular e o cone como uma pirâmide a base circular

sensação é de ter conseguido mudar o foco de uma matemática tecnicista [2] [12], baseada em formulas prontas e algoritmos, para uma matemática como atividade humana e cultural, fruto de debate entre propostas e posições diferentes, que dialoga com a técnica, as ciencias e, em geral, a sociedade.

Estamos convencidos do que a esta proposta didática seja extremamente rica de possibilidade e desdobramentos, cabendo ao professor escolher possíveis roteiros e narrativas a serem explorados: por exemplo, uma possibilidade à qual pensamos em fase de preparação mas que não coube na dinâmica de aula consistia em trabalhar com o tempo de impressão dos diferentes sólidos e, sabendo que a "velocidade de impressão" é costante, calcular experimentalmente o volume dos sólidos. Ainda, a atividade de impressão requer alguns cuidados práticos: por exemplo, imprimir uma esfera cheia pode apresentar algumas dificuldades devido ao fato que a "base" da esfera no plano de impressão, idealmente, seria somente um ponto: talvez seria melhor pensar de imprimir duas semiesferas, passiveis de ser montadas juntas a formar uma interia.

Por tudo isso, queremos compartilhar esta experiência de trabalho que retoma ideias fundamentais na história da matemática utilizando como recurso didático as possibilidades oferecidas pela impressora 3D, esperando que possa ser um exemplo de boa prática a ser retomada, discutida e usada como base por outras atividades e por outros colegas.

REFERÊNCIAS

[1] BRUNER J. O processo da educação. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1978.
[2] CARAÇA, B. de J. Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa: Edições Cosmos, 1941
[3] MACHADO, N. J. Epistemologia e didática. São Paulo: Cortez, 1995.
[4] AUSUBEL, D. P. Educational Psychology: A Cognitive View. New York: Holt, Rinehart & Winston. 1968.
[5] MACHADO, N. J. Matemática e língua materna. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993.
[6] TERUZZI, A. E. *A produção de sentido na aula de matemática*: a história da matemática como base para a construção de narrativas no ensino médio. São Paulo: USP (Dissertação de Mestrado), 2017.
[7] FURINGHETTI, F. Quattro anni di impegno internazionale su storia e didattica: bilanci e prospettive. 2004
[8] FURINGHETTI, F. A report on the ICMI study: "The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics". *L'Enseignement Mathématique*, Genève, v. 51, p. 365-372,
[9] RADFORD, L. et al. Reflections on history of Mathematics. History of mathematics and Mathematics Education. In: FRIED, M. N. DREYFUS, T. (Ed.). *Mathematics & Mathematics Education*: searching for common ground. Advances in Mathematics Education, 2014.
[10] ORTEGA Y GASSET, José. La razón histórica. *Obras Completas*. 2ª reimpresión. v. XII. Madrid: Alianza, 1997
[11] Parametros Curriculares Nacionais, Brasil, 1998
[12] BISHOP, A. J. *Mathematical enculturation*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Third printing 1997